جزوه اصول مهندسی باد و زلزله

مدرس: دکتر حسین کیهانی

سال تحصیلی: 96-95

بسم الله الرحمن الرحیم

با سپاس از:

محمد فرج اله تفرشی- مهدی کیامنش- حسین محمّدی- ایمان ایلخانی

فهرست مطالب

چون خودتان مطالب دیگر را اضافه می کنید.فهرست مطالب به ترتیب صفحه درست نکردم

منابع درس :

- مهندسی زلزله(حسن مقدم)

- ژئوتکنیک لرزه ای(کرامر)

- استاندارد 2800

- مباحث کلاس و پاورپویت ارائه شده

اصول مهندسی زلزله و باد:

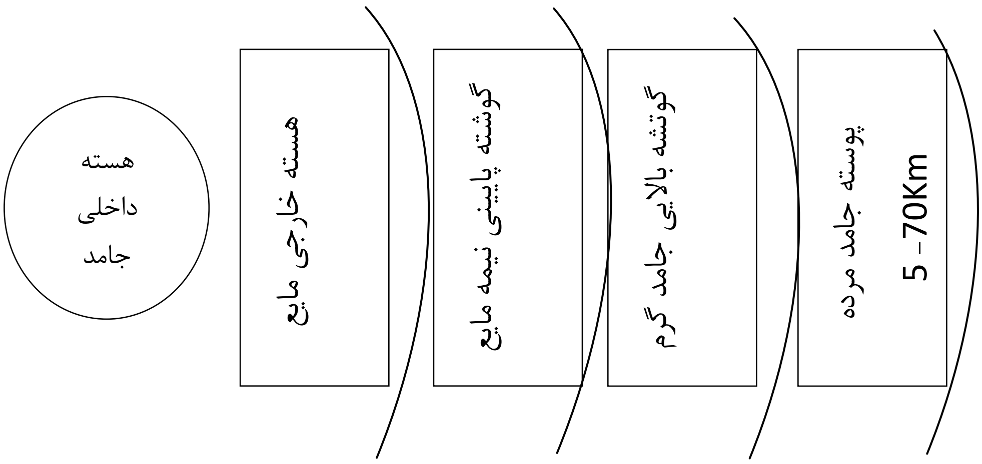
زلزله :

1- لرزه شناسی (Seismology) ← علت زلزله - بررسی کانون- نحوه ایجاد زلزله و رابطه با پارامترهای فیزیکی ← زمین شناسی

2- مهندسی زلزله (Earthquake Engineering) ← اثر زلزله بر ساختمان ها ← مهندسی عمران

لرزه شناسی $\xrightarrow{\text{مهندسی زلزله}}$ مهندسی سازه

لرزه شناسی: طبق نظریه لرزه زمین ساخت، سطح زمین از صفحاتی متحرک تشکل شده است که با توجه به ساختار زمین این صفحات نسبت به هم حرکت می‌نمایند.



هدف مهندسی زلزله :

اهداف مهندسی زلزله عبارت اند از: 1- حداقل نمودن مرگ و میر انسانی 2- حداقل نمودن خسارت مالی: که خسارت مالی می‌تواند به دو صورت اتفاق بیفتد: الف) مستقیم ب) غیر مستقیم

الف : مستقیم با از بین رفتن ساختمان‌ها، موزه‌ها و سایر ابنیه خسارات مالی به کشور وارد می‌شود

ب : غیر مستقیم با توجه به عدم انجام معاملات و تجارت، خسارت دیگری نیز به کشور وارد می‌گردد. طبیعی است هر دو این دسته‌ها به ضرر اقتصاد ملّی خواهد بود.

3- حفظ شریان‌های حیاتی(مثل آب و برق و ...)

چرخه متداول زلزله :

ساخت(بازسازی) ← زلزله ← فراگیری ← تحقیق ← توسعه آیین نامه‌ها

نظریه صفحه زمین ساخت :

این نظریه بیان می‌کند که زمین از تعدادی صفحات صلب تشکیل شده است که در کنار یکدیگر حرکت می‌کنند. در هنگام برخورد این لایه‌ها با یکدیگر، معمولاً صفحات اقیانوسی به سمت پایین رانده می‌شوند در نتیجه این برخورد و فرورانش در نواحی مرزی صفحات زمین، زلزله رخ می‌دهد. پدیده دیگری که در این نواحی مشاهده می‌شود، وقوع آتش فشان است.

علت رخ دادن زلزله‌های درون صفحه‌ای :

همان‌گونه که مشاهده کردیم با استفاده از نظریه لرزه زمین ساخت وقوع زلزله‌ها در نواحی برخورد پوسته‌ها توجیه شد اما برای توجیه زلزله‌های رخ داده شده درون صفحات از نظریه دیگری به نام گسل‌ها (fault) استفاده می‌شود.

گسل‌ها ناپیوستگی‌های ثانویه موجود در صفحات زمین هستند که نسبت به بقیه صفحه دارای ضعف نسبی می‌باشند که هر 1200 سال یا حتی دیرتر از آن جابه جایی در آن رخ داده باشد.

انواع گسل ها :

الف) گسل ساکن(نرمال)

ب) گسل معکوس(فشاری): لایه‌های قدیمی تر روی لایه های جدیدتر قرار می‌گیرند.

ج) لغزش جانبی(راستا لغز)

د) ترکیب گسل‌های قائم و لغزش جانبی

برای بیان زلزله دو پارامتر مهم وجود دارد: 1- کانون زلزله 2- رو مرکز

کانون زلزله محلی است که انرژی در آن‌جا آزاد می‌شود و رو مرکز محل تلاقی شعاع گذرنده از کانون و سطح زمین است.

کانون امواج آزاد شده در کانون ؛ فرکانس بالا هستند $f = \frac{1}{T}$

انواع امواج آزاد شده از گسل(امواج حاصل از زلزله) :

به طور کلی از گسل ها دو دسته موج آزاد می شوند:

1- امواج حجمی:

الف) امواج اولیه P ← از نوع امواج طولی← راستای ارتعاش و انتشار یکسان

ب) امواج ثانویه S ← از نوع امواج ثانویه (عرضی)← راستای ارتعاش و انتشار عمود: 1) S_H 2) S_V

2- امواج سطحی:

الف) $S_H + P$ لاو

ب) $S_v + P$ ریلی

نکته: در انفجار اولین امواج، امواج p هستند و بسیار قوی اند و در زلزله امواج p و s ضعیف هستند ولی سطح شدت بیشتری دارند.

در انفجار موج p بزرگ‌تر از s و در زلزله موج s بزرگ‌تر از p می‌باشد

ثبت حرکات زلزله : برای ثبت زلزله از 2 دسته ابزار آلات مختلف استفاده می‌شود:

1- لرزه نگار← لرزه نگاشت.

2- شتاب نگار← شتاب نگاشت.

لرزه نگار: جا به جایی زمین در هنگام زلزله را ثبت می‌کند و در زمین شناسی کاربرد دارد.

شتاب نگار: شتاب زمین را ثبت می‌کند در مهندسی کاربرد دارد.(مهم‌تر از لرزه نگار است)

علل وقوع زلزله:

طبیعی:

1- حرکات صفحات پوسته زمین (عامل بیش از 95 درصد زلزله ها)

2- آتش فشان‌ها

3- فروریختن غارهای عظیم زیرزمینی

انسانی:

4- فشار زیاد وارده بر زمین توسط سدهای بزرگ

5- انفجارهای هسته ای

اندازه زلزله : برای بیان نمودن اندازه زلزله دو دسته واحد داریم: شدت و بزرگا

شدت زلزله واحدی کیفی است و بزرگا واحدی کمی است.معروف ترین آن مرکالی اصلاح شده است.

با استفاده از 3 تا شتاب نگاشت و محل تلاقی آن‌ها، محل کانون زلزله مشخص می‌شود.

تعریف بزرگا بر مبنای ریشتر: با توجه به پیشرفت در دستگاه‌های شتاب نگار و مطالعات انجام شده بر روی شتاب نگاشت‌ها، ریشتر اولین تعریف کاربردی از بزرگا را ارائه نمود. براساس تعریف ریشتر بزرگا عبارت اند از لگاریتم بر مبنای 10 بزرگ‌ترین دامنه‌ی تغییر مکان ثبت شده توسط دستگاه وود اندرسون استاندارد که در فاصله‌ی 100 کیلومتری از کانون زلزله قرار گرفته است. اگر دقیقاً در آن فاصله قرار نداشته باشد، از تصحیح زیر استفاده می‌شود:

Δ = فاصله دستگاه تا محل وقوع زلزله

$$M = Log_{10}^{A} \qquad M = M_{\Delta} - 1.73 Log_{10}^{\left(\frac{100}{\Delta}\right)}$$

یا از نوموگرام استفاده می‌کنیم.

$M_{\Delta} = Log_{10}^{A_{\Delta}}$ در فاصله ی Δ

تاثیرات امواج زلزله : امواج زلزله دارای تأثیراتی به شرح زیر می‌باشند:

1- Fault rupture (شکافت گسل) یا گسیختگی گسل

2- (Ground shaking) لرزش زمین : لرزش زمین باعث ایجاد نیروهای اینرسی در سازه شده و ممکن است سبب تخریب زمین آن شود.

3- (Landslides) رانش(لغزش) زمین : در شیب‌های ناپایدار رانش زمین به علت وقوع زلزله ممکن است باعث خرابی‌های گسترده‌ای شود.

4- (Liquefaction) آب‌گونه‌ای : در خاک‌های دانه‌ای اشباع افزایش ناگهانی در تنش باعث بالا زدن آب و تحمل آن تنش توسط آب می‌گردد. طبیعتاً آب به عنوان یک سیال تحمل مقاومت برشی ندارد و سبب می‌شود آبنیه قرار گرفته شده روی آن واژگون شود یا فرو روند.

5- Tsunamis (سونامی): به علت رخ دادن زلزله در اقیانوس‌ها موج تشکیل می‌گردد که ممکن است تا چند ده متر بلندی داشته باشد که به علت وزن مخصوص بالای آب این امواج می‌توانند بسیار بسیار مخرب باشند.

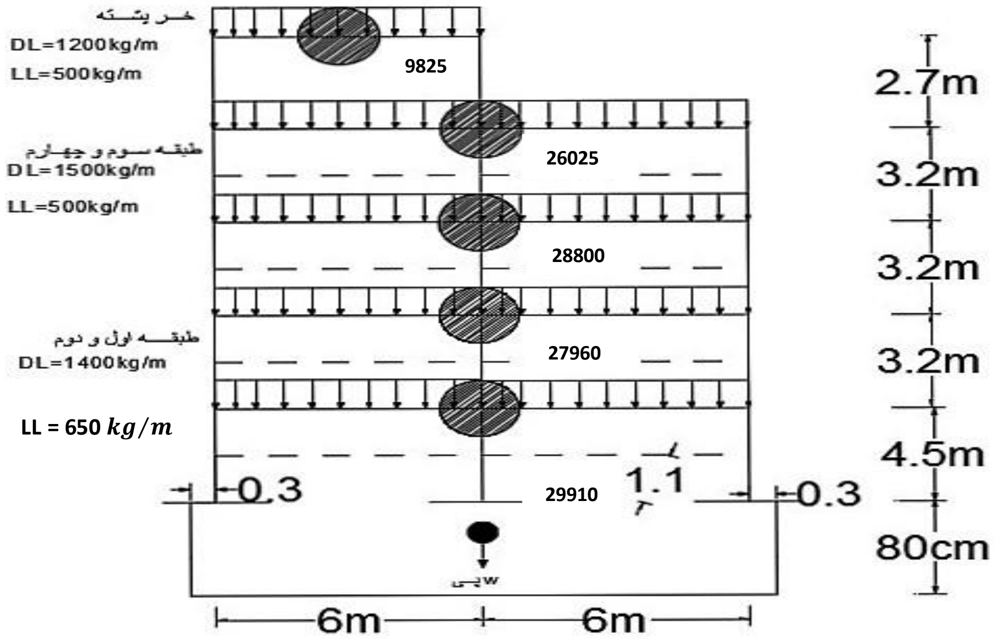
6- (Speeches) سیلش : به اثر زلزله(ضربه آب) بر سیالات موجود در منابع بسته گفته می شود.

سختی: به تغییر مکان سازه بستگی دارد و مجموع آن پایداری سازه است.

مقاومت : مجموع تنش های وارد به هر سازه (طبقه) است.

نکته: مطالب درس داده شده از کتاب 2800 مطالعه شود.

مثال:



بار واحد سطح دیوار: $250\dfrac{Kg}{m^2}$ تهران – خاک نوع III

بار واحد سطح دیوار در قاب نشان داده شده است. مطلوب است:

وزن موثر سازه؟

توزیع نیروی زلزله در طبقات؟

و محاسبه‌ی لنگر واژگونی سازه؟ (قاب خمشی فولادی متوسط)

وزن ناشی از بار مرده طبقه‌ی اول : $1400 \times 12 = 16800$

وزن ناشی از بار زنده : $650 \times 12 = 7800$

بار دیوار : $(2.25 + 1.6) \times 12 \times 250 = 11550$

وزن موثر لرزه ای $W_{e1} = 16800 + (\dfrac{20}{100} \times 7800) + 11550 = 29910$

وزن ناشی از بار مرده طبقه‌ی دوم : 16800

وزن بار زنده : 7800

بار دیوار : $3.2 \times 12 \times 250 = 9600$

وزن موثر لرزه‌ای $W_{e_2} = 16800 + 9600 + (\frac{20}{100} \times 7800) = 27960$

وزن ناشی از بار مرده طبقه‌ی سوم : $1500 \times 12 = 18000$

وزن ناشی از بار زنده $= 500 \times 12 = 6000$

بار دیوار $= 3.2 \times 12 \times 250 = 9600$

وزن موثر لرزه‌ای $W_{e_3} = 18000 + 9600 + (\frac{20}{100} \times 6000) = 28800$

وزن ناشی از بار مرده طبقه‌ی چهارم $= 1500 \times 12 = 18000$

وزن ناشی از بار زنده $= 500 \times 12 = 6000$

بار دیوار $= [(1.6 \times 6) + (1.6 + 1.35) \times 6] \times 250 = 6825$

$W_{e4} = 18000 + 6825 + (\frac{20}{100} \times 6000) = 26025$

وزن ناشی از بار مرده خرپشته : $1200 \times 6 = 7200$

وزن ناشی از بار زنده $= 500 \times 6 = 3000$

بار دیوار $= 1.35 \times 6 \times 250 = 2025$

$W_e = 7200 + 2025 + (\frac{20}{100} \times 3000) = 9825$
خرپشته

$\frac{9825}{26025} = \%37.7 > \%25 \Rightarrow$ خرپشته طبقه‌ی مجزا حساب می‌شود.

نکته: از آن جایی که وزن خرپشته بزرگتر از 25٪ وزن بام می‌باشد، پس خرپشته به عنوان یک طبقه مجزا در محاسبات منظور می‌گردد.

محاسبه ضریب برش پایه :

$$C = \frac{ABI}{R}$$

تهران: خطر نسبی خیلی زیاد ← A = 0.35

محاسبه T:

قاب خمشی فولادی $T = 0.08H^{\frac{3}{4}} = 0.08 \times 16.8^{\frac{3}{4}} = 1.24S$

$H = 4.5 + 3 \times 3.2 + 2.7 = 16.8$

نکته: دلیل اضافه شدن 2.7 این است که خرپشته هم یک طبقه محسوب شده است.

چون جداگرهای میان قابی در این مسئله مانع حرکت آزادانه قاب نمی‌شوند، ضریب اصلاحی 0.8 اعمال نمی‌گردد.

زمین نوع III $\left.\begin{array}{l} T_0 = 0.15 \\ T_S = 0.7 \\ S = 1.75 \\ S_0 = 1.1 \end{array}\right\}$

$$T > T_S \Rightarrow B_1 = (S+1)\times\left(\frac{T_S}{T}\right) = 2.75\times\frac{0.7}{1.24} = 1.55$$

$$0.7 < 1.24 < 4 \Rightarrow N = \frac{0.7}{4-0.7}(T - T_S) + 1 \Rightarrow$$

$$N = \frac{0.7}{3.3}(1.24-0.7)+1 \Rightarrow 1.1145$$

$$B = NB_1 = 1.1145\times1.55 = 1.73$$

قاب خمشی فولادی متوسط ← R = 5

$$C = \frac{ABI}{R} = \frac{0.35\times1.73\times1}{5} = 0.1211$$

$$\frac{B}{R} = \frac{1.73}{5} = 0.34 > 0.12$$

$$V_u = CW_e = 0.1211\times122520 = 14837.172 \simeq 14.84\,ton$$

نکته: اگر کمتر از 0.12 شد، خود 0.12 را میگذاریم. و ضریب زلزله مینیمم 0.12AI می‌شود.

$$F_{ui} = \frac{W_i h_I^K}{\sum_{i=1}^{n} W_{ej} h_j^k}\times V_u$$

$$\sum_{j=1}^{n} W_{ej} h_j^k = W_{ej1}\times h_1^{1.37} + W_{ej2}\times h_2^{1.37} + W_{ej}3$$

$$K = 0.5\ T + 0.75$$

$$\sum_{j=1}^{n} W_{ej} h_j^k = 29.910\times(4.5)^{1.37} + 27.96\times(4.5+3.2)^{1.37} + 28.85\times(7.7+3.2)^{1.37}$$

$$+26.025\times(10.9+3.2)^{1.37} + 9.825\times(14.1+2.7)^{1.37} = 2898.37$$

خرپشته $F_u = \dfrac{9.825 \times (16.8)^{1.37}}{2898.37} \times 14.84 = 2.4ton$

طبقه 4 $F_{u_4} = \dfrac{976.83}{2898.37} \times 14.84 = 5$

طبقه 3 $F_{u_3} = \dfrac{759.74}{2898.37} \times 14.84 = 3.88$

طبقه 2 $F_u = \dfrac{458.17}{2898.37} \times 14.84 = 2.34$

طبقه 1 $F_u = \dfrac{234.81}{2898.37} \times 14.84 = 1.25$

لنگر واژگونی :

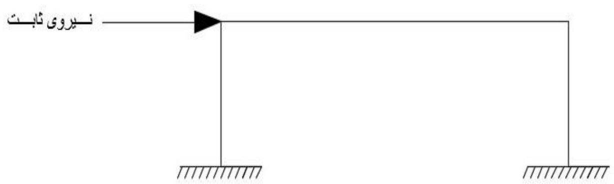
برای محاسبه لنگر واژگونی باید پایین ترین نقطه پی را در نظر بگیریم.

$M_0 = 1.2 \times 5.3 + 2.34 \times 8.5 + 3.88 \times 11.7 + 5 \times 14.9 + 2.4 \times 17.6 = 188.38$

$M_R = 29.910 \times 6.3 + 27.96 \times 6.3 + 28.8 \times 6.3 + 26.025 \times 6.3 + 9.825 \times 9.3 + 0.8 \times 1.1 \times 12.6 \times 2.5 \times 6.3$

$\dfrac{M_R}{M_0} = 5.1 > 1.75$

دینامیک سازه ها:



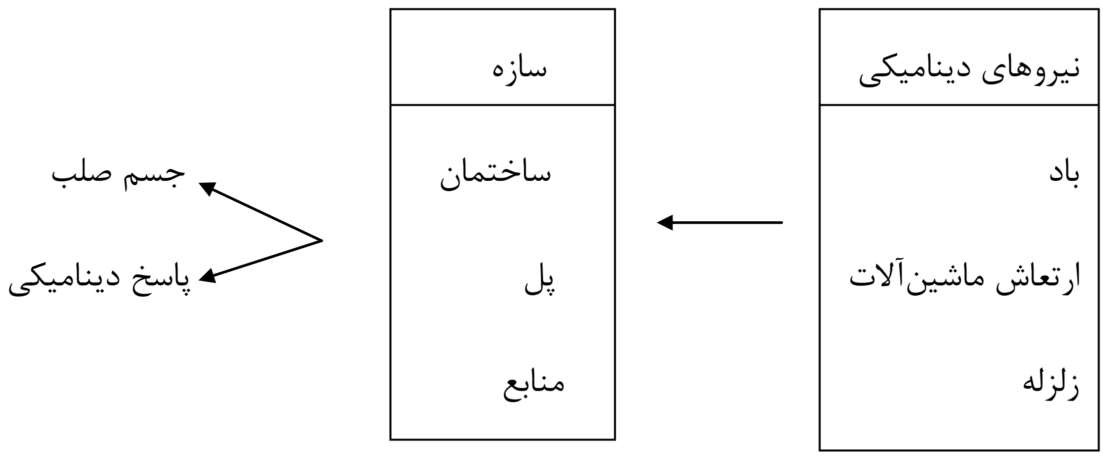
تعریف نیروهای دینامیکی: تاکنون با سازه‌هایی سر و کار داشتیم که تحت اثر نیروهای استاتیکی بودند. به عبارتی نیرو با زمان تغییر نمی‌کرده است اما سازه در طبیعت تحت اثر نیروهایی قرار می‌گیرد که ممکن است مقدار و جهت و راستای آن‌ها با زمان تغییر کند. اصطلاحاً به این نیروها، نیروهای دینامیکی اطلاق می‌شود.

نیروهای دنیامیکی : بین این سه کلمه (یا) برقرار است.

1- مقدار

2- جهت

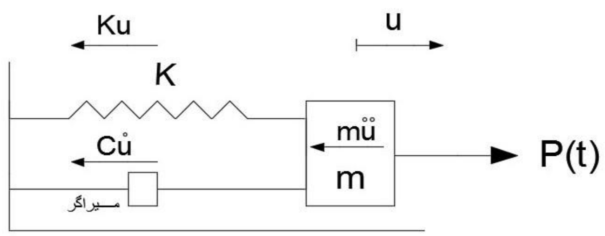
3- راستا



به علت تغییرات سرعت بارگذاری با زمان در سازه علاوه بر نیروهای ناشی از سختی نیروهای ناشی از لختی به وجود می‌آید که به صورت جرم × شتاب در محاسبات وارد می‌گردد. علاوه بر آن به علّت وجود سرعت در سازه، نیروهایی در سازه ایجاد می‌گردد که به نام نیروهای میرایی شناخته می‌شوند که در صورتی که این نیروها وجود نداشته باشند، سازه تا ابد به ارتعاش خود ادامه می‌داد.

$$F = \frac{mV_1 - mV_2}{t} = \frac{m(\Delta V)}{t} = ma$$ نیروی لختی

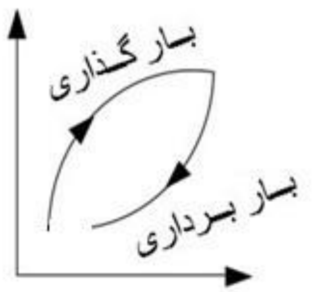
معادله حرکت دینامیکی :



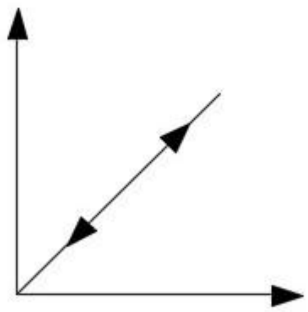
$$\overset{\xleftarrow{+}}{\sum} F_X = 0 \Rightarrow m\ddot{u} + C\dot{u} + Ku - P(t) = 0$$

$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = P(t)$　　　　معادله حرکت دینامیکی ⟵

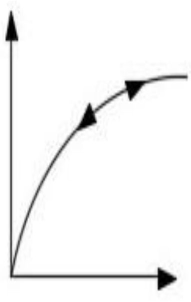
1- رابطه‌ی نیروی تغییر مکان k_u:



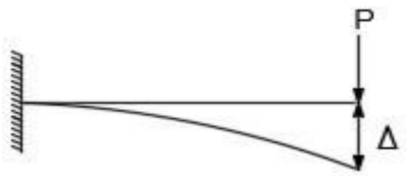
غیر خطی(غیر الاستیک)



الاستیک خطی



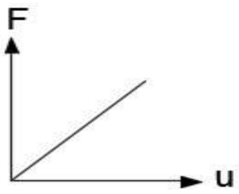
(غیر خطی الاستیک)الاستیک غیر خطی



$$\Delta = \frac{PL^3}{3EI} \equiv P = K\Delta \Rightarrow \frac{3EI}{L^3}\Delta = P$$

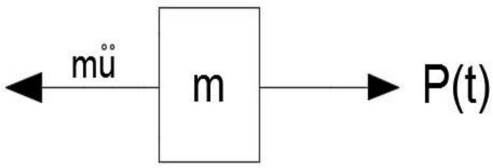
$$K = \frac{3EI}{L^3}$$

2- رابطه میرایی سرعت:



$$F_C = C\dot{u}$$

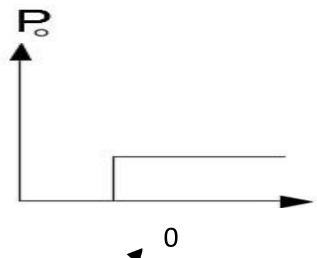
3- شتاب و جرم : مطابق اصل دالامبر، میزان نیروی اینرسی ایجاد شده در جرم برابر است با $m\ddot{u}$ و جهت آن خلاف جهت نیروی اعمال شده است.



روش‌های حل معادلات دیفرانسیل حرکت:

1) روش کلاسیک :

مثال: نیروی پله ای P_0 را در نظر بگیرید. با فرض سیستم بدون میرایی، معادله دیفرانسیل حرکت را حل نمایید.



$$m\ddot{u}+\cancel{c\dot{u}}+ku=P_0$$

$$m\ddot{u}+ku=P_0$$

$$U_p(t)=\frac{p_0}{k}$$

$$U_c(t)=A\cos w_n t+B\sin w_n t$$

$$u(t)=A\cos w_n t+B\sin w_n t+\frac{p_0}{k}$$

با فرض حرکت از سکون　　$u(0)=0$

شرایط مرزی $\dot{u}\ (0)=0$

$$u(0)=A\cos w_n\times 0+B\sin w_n\times 0+\frac{p_0}{k}=0\rightarrow A+0+\frac{p_0}{k}=0$$

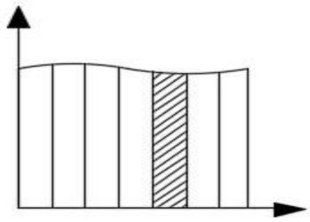
$$A=-\frac{P_o}{k}$$

$$\dot{u}(t)=-w_n A\sin w_n t+w_n B\cos w_n t\rightarrow \dot{u}(0)=-w_n A\sin w_n\times 0$$

$$+w_n B\cos w_n\times 1=0\rightarrow w_n B=0\rightarrow B=0$$

وارد شود　　معادله‌ی پاسخ　$u(t)=\frac{p_0}{k}[1-\cos(w_n t)]$

2) انتگرال گیری دو عامل :



$$u(t)=\frac{1}{mw_n}\int_0^t P(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$=\frac{1}{mw_n}\int_0^t P(\tau)\sin[W_n(t-\tau)]d\tau$$

$$w_n=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$u(t)=\frac{1}{mw_n}\int_0^t P_0\sin[w_n(t-\tau)]d\tau$$

$$=\frac{P_0}{mw_n}\left(\frac{\cos w_n(t-\tau)}{w_n}\right)_0^t$$

$$u(t)=\frac{P_0}{k}(1-\cos w_n t)$$

وارد شود.

3) حوزه فرکانس (تبدیل فوریه):

$$P(w) = Fe[p(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t) e^{-iw_n t} dt$$

$$U(w) = P(w) \quad H(w)$$

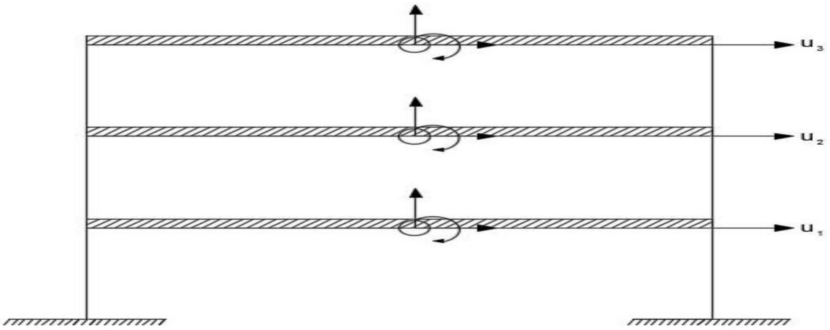
$$u(t) = F_e^{-1}(u(w)) \rightarrow u(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} H(w)\, p(w) e^{iwt} dw = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} u(w) e^{iwt} dw$$

4) روش های عددی

- دینامیک سازه‌ها
  - سازه های یک درجه آزادی
    - ارتعاش آزاد
      - با میرایی
      - بدون میرایی
    - ارتعاشی واداشته (اجباری)
      - با میرایی
      - بدون میرایی
  - چند درجه آزادی
    - با میرایی
      - متناسب
      - نامتناسب ← اعداد مختلط
    - بدون میرایی

ارتعاش آزاد سیستم‌های یک درجه آزادی :

تعریف درجه آزادی دینامیکی : در دینامیک سازه ها به منظور سهولت استخراج معادلات حرکت از قاب‌های برشی استفاده می‌شود. خصوصیات قاب‌های برشی به این گونه‌اند که دارای سقف صلب هستند و در آن‌ها از تغییر شکل محوری ستون صرف نظر می‌شود.



تعداد درجات آزادی مستقلی که برای بیان تغییر شکل دینامیکی قاب یا سازه لازم است، درجه آزادی دینامیکی نامیده می شود.

ساده ترین حالت سیستم‌های دینامیکی، سیستمی است که یک درجه آزادی دینامیکی دارد که اصطلاحاً به آن سیستم یک درجه آزادی گفته می‌شود.

تعریف ارتعاش آزاد:

ارتعاش آزاد حالتی است که در آن سازه از وضعیت اولیه خارج شده (تغییر شکل و یا سرعت اولیه به آن وارد شود) و سپس اجازه داده شود که بدون نیروی خارجی، سازه ارتعاش نماید. که همان‌گونه که عنوان شد برای ارتعاش آزاد دو حالت بدون میرایی و با میرایی بررسی خواهد شد.

الف) ارتعاش آزاد بدون میرایی: در این حالت معادله حرکت عبارت اند از :

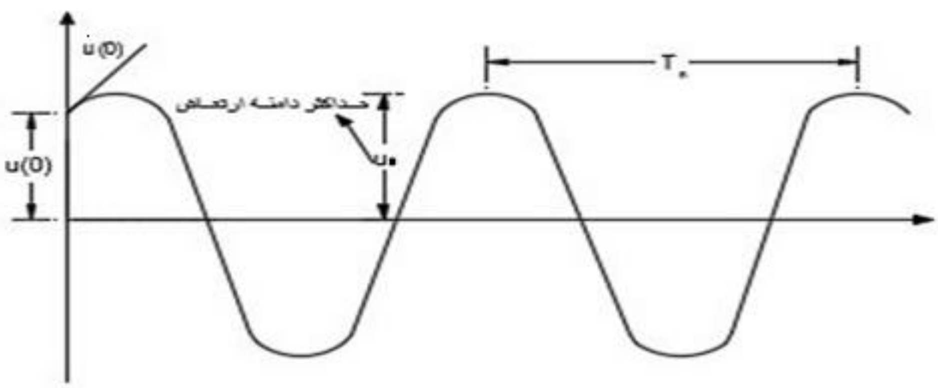
$$m\ddot{u} + ku = 0$$

$$u(t) = u(0)\cos(w_n t) + \frac{\dot{u}(0)}{w_n}\sin(w_n t)$$

فرکانس طبیعی :

$$w_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

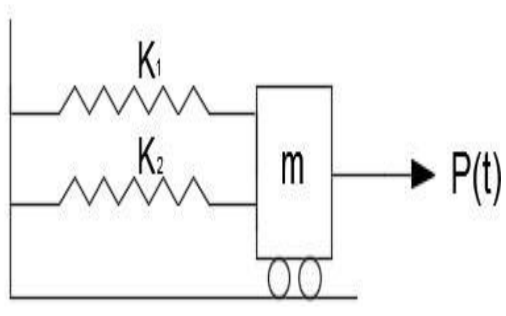
$$T_n = \frac{2\pi}{w_n} \qquad f_n = \frac{1}{T_n} = \frac{w_n}{2\pi} \qquad u_0 = \sqrt{u(0)^2 + \left(\frac{\dot{u}(0)}{w_n}\right)^2}$$



تمرین: پاسخ سیستم یک درجه آزاد در حالت ارتعاش آزاد بدون میرایی را بدست آورید.

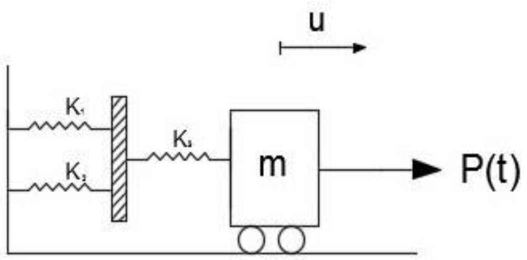
$$u = e^{st}$$

مثال: معادله حرکت سیستم‌های زیر را بنویسید.



$$m\ddot{u} + c\dot{u} + k_e u = P(t)$$

$$m\ddot{u} + (k_1 + k_2)u = P(t) = 0$$

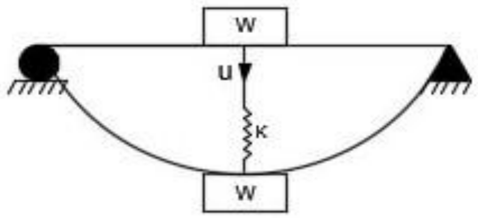


$$m\ddot{u} + k_e u = 0$$

$$\frac{1}{k_e} = \frac{1}{k_1 + k_2} + \frac{1}{k_3}$$

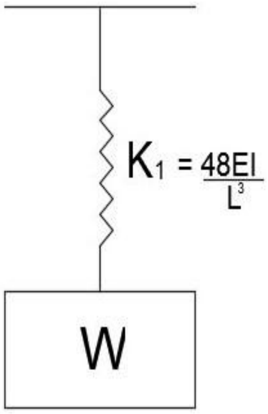
$$\frac{1}{k_e} = \frac{k_1 + k_2 + k_3}{(k_1 + k_2)k_3} \rightarrow k_2 = \frac{(k_1 + k_2)k_3}{k_1 + k_2 + k_3}$$

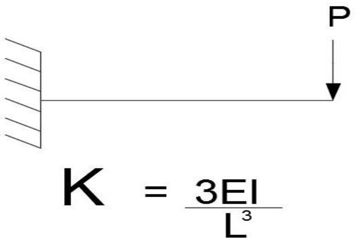
مثال: معادله ارتعاش تیرهای زیر را بنویسید.

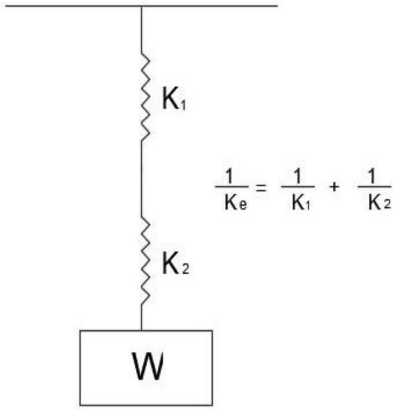


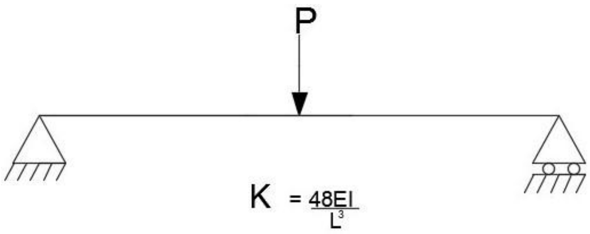
$$m\ddot{u} + ku = 0$$

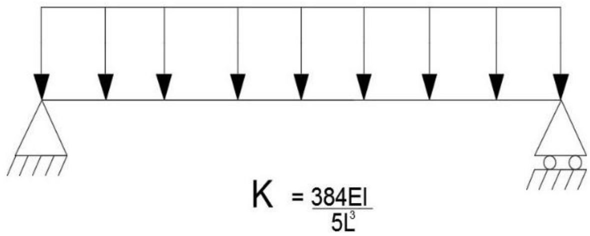
$$\frac{w}{g}\ddot{u} + \frac{48EI}{L^3}u = 0$$











مثال: یک دال سنگین متکی بر چهار ستون فولادی می‌باشد. زمان تناوب طبیعی آن در ارتعاش جانبی برابر 0.5 S است. وقتی یک وزنه‌ی 22.5 kg روی آن پیچ می‌شود، زمان تناوب طبیعی سازه به 0.75 افزایش می‌یابد. وزن دال و سختی سطوح‌های جانبی را بیابید.

حالت اول (بدون وزنه) : $W_n = \sqrt{\frac{\quad}{m_1}}$

حالت دوم $\Rightarrow k = m_2 w_n^2 \Rightarrow (m_2 = m_1 + 22.5) \Rightarrow m_1 w_{n_1}^2 = (m + 22.5) w_{n_2}^2$

$$m_1\left(\frac{4\pi^2}{0.5^2}\right) = (m_1 + 22.5)\left(\frac{4\pi^2}{(0.75)^2}\right)$$

27.5 kg

$$\Rightarrow m_1 = 18kg \Rightarrow k = m_1 \frac{4\pi^2}{0.5^2}$$

$$T_n = \frac{2\pi}{w_n} \quad \bullet \quad w_n = \frac{2\pi}{T_n}$$

ب) ارتعاش آزاد با وجود میرایی:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0$$

$$\ddot{u}(t) + \frac{c\dot{u}}{m}(t) + \frac{k}{m}u(t) = 0$$

کل رابطه اول را تقسیم به mکردیم

$$C_{cr} = 2mw_n$$

$$\zeta = \frac{C}{C_{cr}} = \frac{C}{2mw_n}$$

$$\ddot{u}(t) + 2W_n\zeta\dot{u}(t) + w_n^2u(t) = 0$$

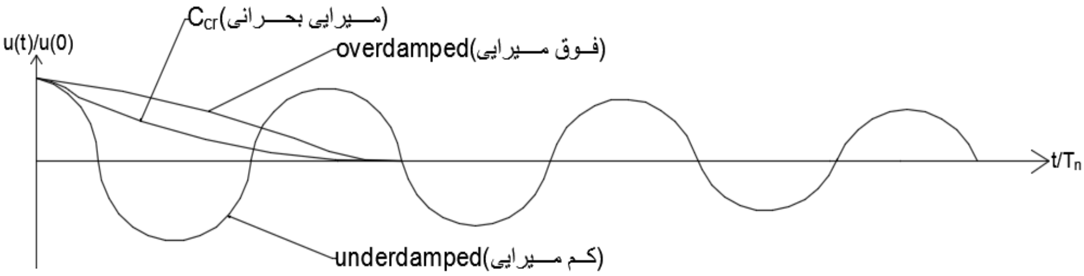
$$W_n^2 = \frac{k}{m}$$

سیستم ها از نظر میرایی به سه دسته تقسیم می شوند :

میرایی سیستم ها:

1. کم میرا under damped
2. میرایی بحرانی critically damped
3. فوق میرا over damped

حل معادله ارتعاش آزاد با میرایی برای سیستم کم میرا:



$$\ddot{u}+2\zeta w_n\dot{u}+w_n^2u=0$$

$$u=e^{st}$$

$$\left(S^2+2\zeta w_n S+W_n^2\right)e^{st}=0$$

پاسخ $S_1,S_2=W_n\left(-\zeta\pm i\sqrt{1-\zeta^2}\right)$

$$S_1,S_2\in,\ \ S_1\neq S_2$$

$$u(t)=A_1e^{s_1t}+A_2e^{s_2t}$$

$$S_1=S_2\Rightarrow u(t)=A_1e^{s_1t}+A_2te^{s_2t}$$

$$S_1,S_2\in\phi$$

فرکانس تغییر یافته بر حسب میرایی $W_D=W_n\sqrt{1-\zeta^2}$

$$\ddot{u} + 2w_n\dot{u} + w_n^2 u = 0$$

$$u(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

$$u(t) = e^{-\zeta w_n t}\left(A_1 e^{iw_D t} + A_2 e^{-iw_D t}\right)$$

$$e^{\pm iw_n t} = \cos w_n t \pm i \sin\, w_n t$$

$$u(t) = e^{-\zeta w_n t}\left(A\cos w_D t + B\sin\, w_D t\right)$$

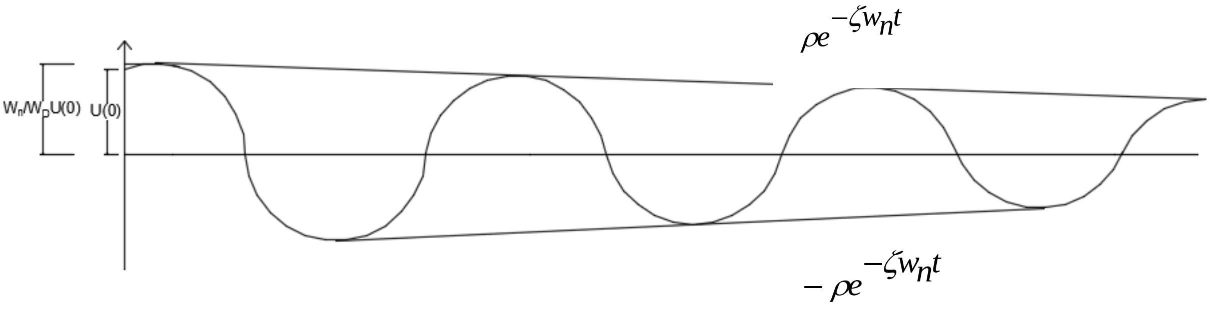
$$u(0) = A$$

$$\ddot{u}(0) = 0 \Rightarrow B = \frac{\dot{u}(0) + \zeta W_n u(0)}{W_D}$$

حل معادله زیر بحرانی: $u(t) = e^{-\zeta w_n t}\left[u(0)\cos w_D t + \frac{\dot{u}(0) + \zeta w_n u(0)}{w_D}\sin\, w_D t\right]$

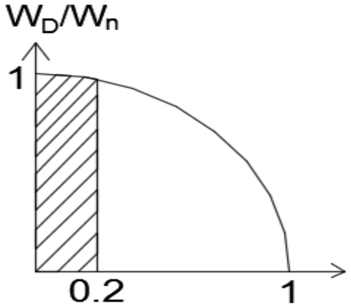
فرکانس تغییر یافته بر حسب میرایی : $w_D = w_n\sqrt{1-\zeta^2}$

$T_D = \frac{T_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}$ دوره تناوب تغییر یافته است



$$\rho = \sqrt{u(0)^2 + \left[\frac{\dot{u}(0) + \zeta w_n u(0)}{w_D}\right]^2}$$

$$\frac{w_D}{w_n} = \frac{T_n}{T_D}$$



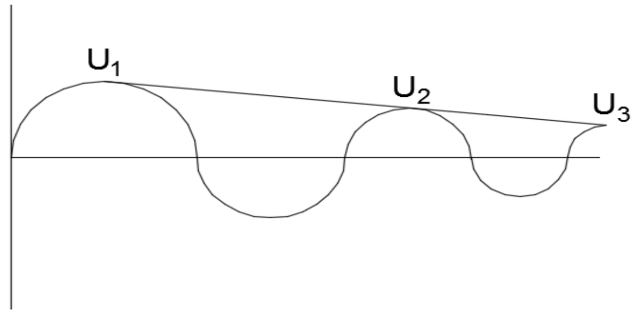
$$w_D = w_n \sqrt{1-\zeta^2}$$

$$\left(\frac{w_D}{w_n}\right)^2 + \zeta^2 = 1$$

$$u(t) = \rho \cos(w_n t - \theta)$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{\dot{u}(0)}{w_n}}{u(0)}\right)$$

زوال حرکت : در ارتعاش آزاد با میرایی دامنه‌ی حرکت به تدریج کاهش می‌یابد. با استفاده از قانون کاهش لگاریتمی می‌توان دامنه حرکت پس از گذشت چند چرخه را بدست آورید.



$$\frac{u_i}{u_{i+1}} = \exp\left(\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) = e^{\left(\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)}$$

کاهش لگاریتمی $\leftarrow \delta = L_n \frac{u_i}{u_{i+1}} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$

$$\zeta = \frac{1}{2\pi j} L_n \frac{u_i}{u_{i+j}}$$

برای نسبت‌های میرایی کم $0.2 > \zeta \leftarrow \quad \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \simeq 2\pi\zeta$

مثال: ماشینی به وزن 115 kg بر روی یک سیستم تکیه گاهی متشکل از 4 فنر و 4 میراگر قرار گرفته است. تغییر مکان قائم سیستم تکیه‌گاهی تحت وزن ماشین 2 cm است. میراگرها طوری طراحی شده اند که دامنه‌ی ارتعاش بعد از دو نوسان کامل به 0.125 دامنه‌ی اولیه کاهش یابد.

مشخصه‌های زیر از سیستم را محاسبه کنید.

الف) فرکانس طبیعی نامیرا   ب) نسبت میرایی   ج) فرکانس طبیعی تغییر یافته

$$F = k\Delta \rightarrow mg = k\delta_{st}$$

$$w_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{\frac{mg}{\delta_{st}}}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}} = \sqrt{\frac{981}{2}} = 22.15$$

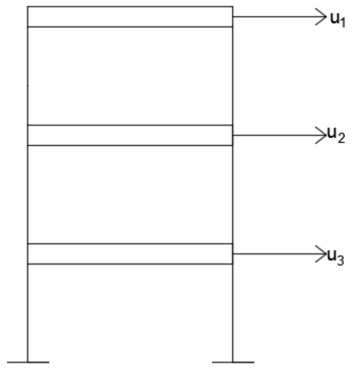
$$\zeta = \frac{1}{2\pi j} L_n \frac{u_i}{u_i + j} = \frac{1}{2\pi \times 2} L_n \frac{u_i}{0.125 u_i} = 16.5\%$$

$$w_D = w_n\sqrt{1-\zeta^2} = 22.15\sqrt{1-(0.165)^2}$$

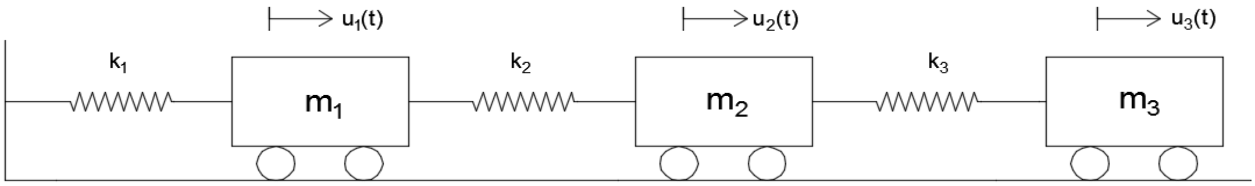
$$w_D = 21.84 \frac{rad}{s}$$

سیستم‌های چند درجه آزادی : Multi Degree of Freedom systems

سازه شکل زیر را در نظر بگیرید. این سازه از نظر درجه آزادی دینامیکی دارای سه درجه آزادی می‌باشد:

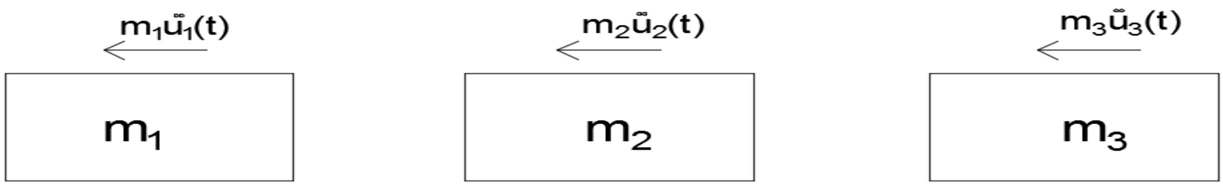


تشکیل معادله حرکت برای این سیستم با همان قوانین یک درجه آزادی صورت می‌گیرد که در این جا حالت ساده بدون میرایی را در نظر می‌گیریم.

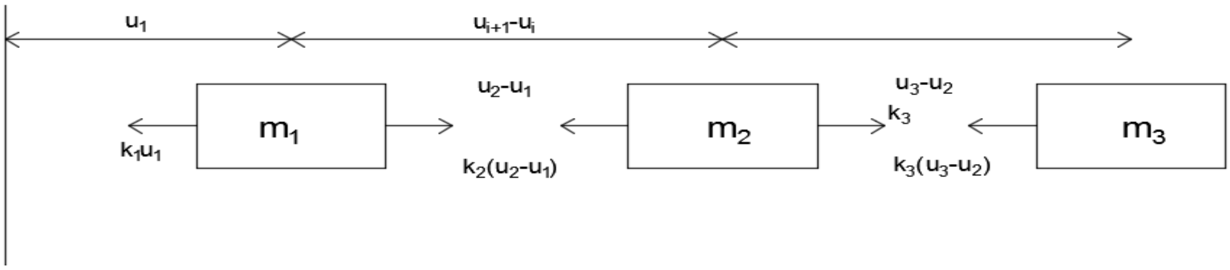


نیروهای وارد بر جرم‌ها :

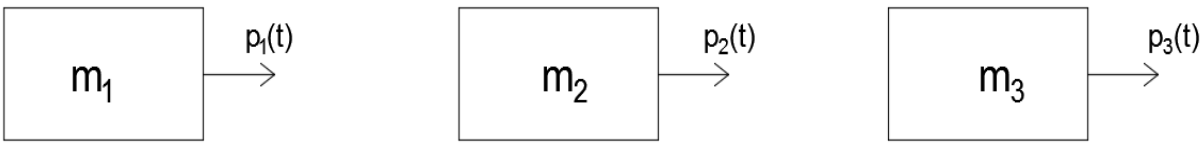
1- اینرسی:



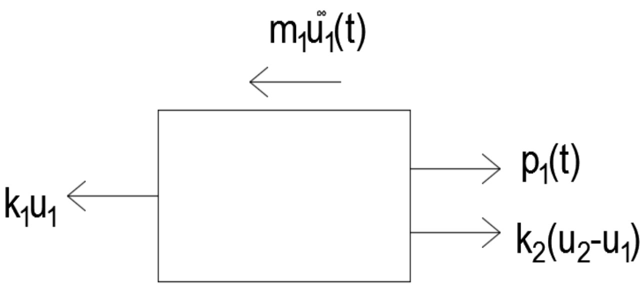
2- نیروی فنرها: به تغییر شکل نسبی وابسته است. $u_{i+1}-u_i$



3- نیروهای خارجی:



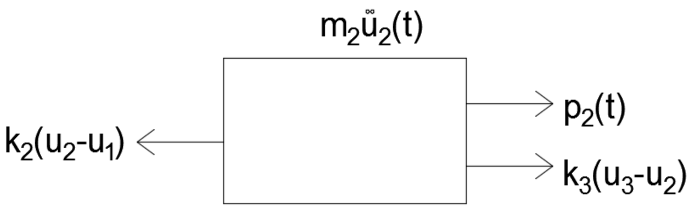
برای تشکیل معادله حرکت لازم است تعادل هر جرم را جداگانه بررسی نماییم.



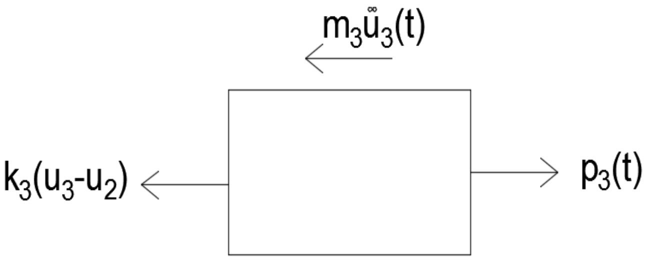
$$m_1\ddot{u}_1 + k_1u_1 - P_1(t) - k_2(u_2 - u_1) = 0$$

$$m_1\ddot{u}_1 + k_1u_1 + k_2u_1 - k_2u_2 = P_1(t)$$

$$m_1\ddot{u}_1 + u_1(k_1 + k_2) - k_2u_2 = P_1(t)$$



$$m_2\ddot{u}_2(t) + k_2(u_2 - u_1) - k_3(u_3 - u_2) - P_2(t) = 0$$



$$m_3\ddot{u}_3 + k_3(u_3 - u_2) = P_3(t)$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

همیشه متقارن		سازه های برشی

- اگر روی قطر اصلی صفر یا منفی باشد (سازه ناپایدار)		ماتریس قطری

$$[M]\{\ddot{u}\} + [k]\{u\} = \{P\}$$

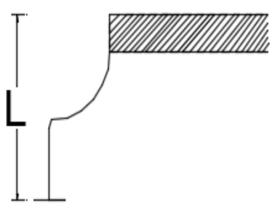
$$M\ddot{u} \quad + \quad ku \quad = P$$

ساختمان برشی: در سازه‌های برشی، جرم‌ها به صورت متمرکز در تراز طبقات مدل می‌شوند و شرایط زیر نیز باید برقرار باشد:

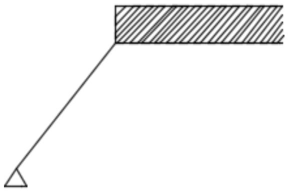
الف) تیرها یا سقف به نسبت ستون‌ها صلب هستند.

ب) چرخش در گره‌ها امکان پذیر نیست.

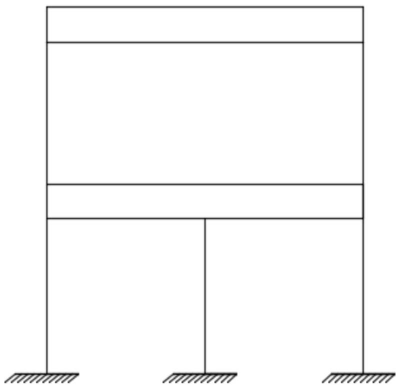
ج) ستون‌ها از نظر محوری صلب می‌باشند.



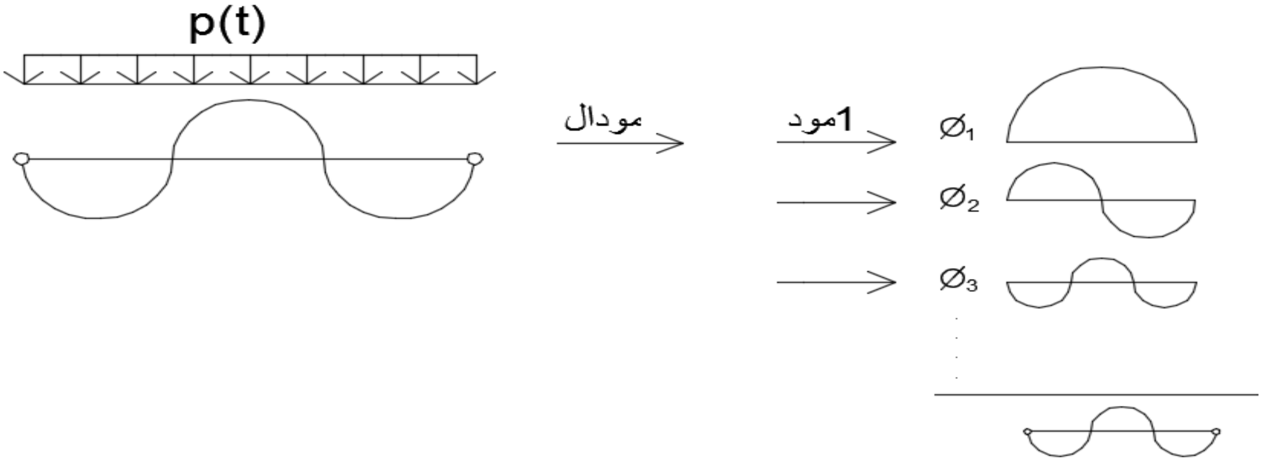
سختی طبقه $k_i = \sum \frac{12EI}{L^3}$



$$k_i = \sum \frac{3EI}{L^3}$$



در این سیستم‌ها ماتریس جرم، قطری می‌باشد امّا در حالت کلی در سیستم‌های جرم پیوسته ممکن است ماتریس جرم، قطری نگردد. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود به این معادلات حرکت، معادلات درگیر حرکت اطلاق می‌شود، زیرا ماتریس سختی قطری نمی‌گردد و لازم است این سیستم به صورت همزمان حل شود. با کاربرد ایده‌ای همانند سری فوریه و همچنین با تغییر فضا اشکال مستقلی از زمان را می‌توان یافت که با ترکیب آن‌ها بتوان تغییر شکل سازه را تعریف نمود.



ثابت می‌شود مودهای مستقل از زمان از حل معادله زیر بدست می‌آید.

$$\left([k]-\underline{\underline{w^2[M]}}\right)\{\phi\}=0$$

که این معادله به مسئله‌ی تعمیم یافته مقدار ویژه معروف است. برای برقراری رابطه بالا لازم است دترمینان $\det\left([k]-w^2[M]\right)=0$ معادله ی حاصل ← معادله‌ی مشخصه‌ی سیستم

یک معادله‌ی چند جمله‌ای درجه n : n تعداد درجه آزادی سیستم و n جواب مستقل از هم دارد.

$$\left([k]-w_i^2[M]\right)\{\phi_i\}=0$$

و نهایتاً حل نهایی $\{u(t)\}$ است.

$$\{u(t)\}=\sum_{i=1}^{n}\{\phi_i\}\left[\sin(w_i t)+\theta_i\right]$$

تعامد مودها:

$$\phi_i^T k \phi_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \neq 0 & i = j \end{cases}$$

$$\phi_i^T M \phi_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \neq 0 & i = j \end{cases}$$

مودال $\phi = \{\phi_1 , \phi_2 , \phi_3 , \; \ldots \; , \phi_n\}$

$\phi^T \; k \; \phi$ ماتریس سختی تعمیم یافته

$\phi^T \; M \; \phi$ ماتریس جرم تعمیم یافته

نسبت ریلی $\dfrac{\phi_i^T \; k \; \phi_i}{\phi_i^T \; M \; \phi_i} = w_i^2$

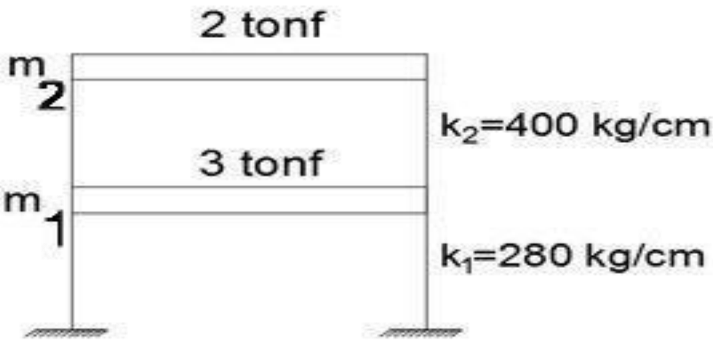
معمولاً بردارهای ویژه به صورتی نرمال می‌شوند که داشته باشیم :

$$\{\hat{\phi}_i\}^T M \{\hat{\phi}_i\} = 1$$

$$\{\hat{\phi}_i\} = \frac{1}{C_i}\{\phi_i\}$$

$$C_i = \pm\sqrt{\{\phi_i\}^t M \{\phi_i\}}$$

مثال: در سازه شکل زیر مطلوب است محاسبه‌ی فرکانس‌های ارتعاشی؛ اشکال مودی ؛ ماتریس مودال ماتریس جرم و سختی تعمیم یافته.



$$k=\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

برای مثال $$k_5=\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3+k_4 & -k_4 & 0 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4+k_5 & -k_5 \\ 0 & 0 & 0 & -k_5 & k_5 \end{bmatrix}$$

$$M=\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3.05 & 0 \\ 0 & 2.04 \end{bmatrix}$$

$$m_1=\frac{3\times10^3}{981}=3.058$$

$$m_2=\frac{2\times10^3}{981}=2/039$$

$$k=\begin{bmatrix} 680 & -400 \\ -400 & 400 \end{bmatrix}$$

معادله مشخصه $\Rightarrow \det\left([k]-w^2[M]\right)=0$

$$\begin{bmatrix} 680 & -400 \\ -400 & 400 \end{bmatrix} - w^2 \begin{bmatrix} 3.06 & 0 \\ 0 & 2.04 \end{bmatrix}$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 680-w^2(3.06) & -400-0 \\ -400-w^2(0) & 400-w^2(2.04) \end{bmatrix}\right)=0$$

$$\det = \left[(680-w^2(3.06))(400-w^2(2.04))\right]-\left[(-400)(-400)\right]$$
$$= 6.2159w^4 - 2605.84w^2 + 112000 = 0$$

$$w_2^2 = 370.6027 \rightarrow w_2 = 19.25$$

$$w_1^2 = 48.61 \rightarrow w_1 = 6.97$$

تناوب مود اول سازه $\Rightarrow T_1 = 0.901\sec$

تناوب مود دوم سازه $\Rightarrow T_2 = 0.32\sec$

ϕ_{ij} تغییر مکان درجه آزادی i ام در مود j ام برای مثال ϕ_{12} تغییر مکان درجه آزادی 1 در مود دوم.

$$[k]-w_i^2\begin{bmatrix} \phi_{1i} \\ \\ \phi_{2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 680-3.06\times 48.61 & -400 \\ \\ -400 & 400-2.038\times 48.61 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \\ \phi_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \\ 0 \end{bmatrix}$$

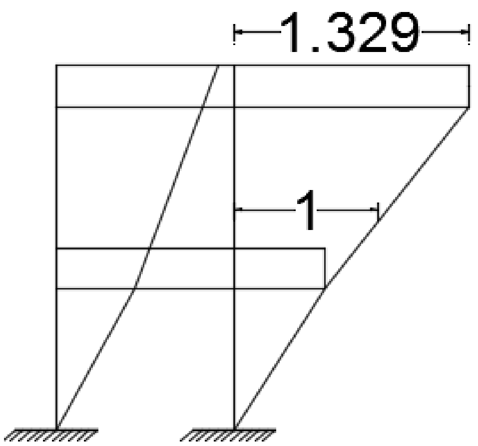
$531\phi_{11} - 400\phi_{21} = 0$

$$\xrightarrow[\text{فرض } \phi_{11}=1]{\text{یک معادله دو مجهول}} \phi_{21} = 1.329$$

$-400\phi_{11} - 300.94\phi_{21} = 0$

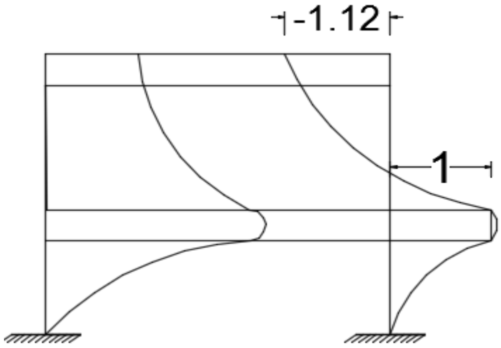
چون یک معادله دو مجهول می‌باشد و در مودها نسبت مودها به یکدیگر مهم می‌باشد. ϕ_{21} را به دست می‌آوریم.

مفهوم تصویری مود اول: اگر درجه آزادی 1 ← یک واحد حرکت کند درجه‌ی آزادی 2 ← 1.329 واحد حرکت می‌نماید.



$$\phi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.329 \end{bmatrix}$$

با تکرار عملیات مشابه برای مود دوم



$$w_2^2 = 370.6027 \Rightarrow \phi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.12 \end{bmatrix}$$

$$\phi = \{\phi_1, \phi_2\} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1.329 & -1.129 \end{bmatrix} \qquad \Omega^2 = \begin{bmatrix} 6.97 & 0 \\ 0 & 19.25 \end{bmatrix}$$

ماتریس جرمی و تعمیم یافته را در منزل خودتان بدست آورید.

ماتریس‌ها قطری می‌شوند. پس یک سیستم n درجه آزادی درگیر حرکت به n سیستم یک درجه آزادی مستقل تبدیل می‌شود.

$$M_1 = \phi^{TM\phi_1} = [1 \quad 1.32] \times \begin{bmatrix} 3.05 & 0 \\ 0 & 2.04 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1.32 \end{bmatrix} = 6.61$$

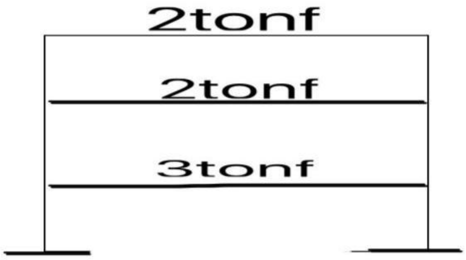
$$K_1 = \phi_1^T K \phi_1$$

و به همین ترتیب برای مورد دوم هم K, M را به دست می اوریم.

مثال قبل را برای سازه 3 طبقه تکرار کنید

M_3=2.039 m_2=2.039 M_1=3.058

K_3=280 k_2=400 k_1=280



$$M = \begin{bmatrix} 3.05 & 0 & 0 \\ 0 & 2.039 & 0 \\ 0 & 0 & 2.039 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 680 & -400 & 0 \\ -400 & 680 & -280 \\ 0 & -280 & 280 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 & 0 \\ -K_2 & K_2 + K_3 & -K_3 \\ 0 & -K_3 & K_3 \end{bmatrix}$$

W_1=5.32 T_1=1.18

W_2=13.4 T_2=0.4686

W_3=22.0322 T_3=0.2852

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} 0.5348 \\ 0.7938 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \phi_2 = \begin{bmatrix} -0.9428 \\ -31 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \phi_3 = \begin{bmatrix} 1.2675 \\ -2.5366 \\ 1 \end{bmatrix}$$